13. A turma 02 do Colégio São Bento tem, ao todo, 28 alunos cujas idades variam entre 9, 10 e 11 anos. Sabendo que $\frac{3}{4}$ dos alunos têm menos de 11 anos de idade e que $\frac{5}{7}$ dos alunos têm mais de 9 anos de idade, é correto afirmar que o número de alunos com 10 anos de idade é

A) 13.

B) 11.

C) 14.

D) 12.

i) $\frac{3}{4}$ dos 28 alunos têm menos de 11 anos.

$\frac{3}{4} \cdot 28 = 21$ alunos têm 9 ou 10 anos .

28 – 21 = 7 alunos têm 11 anos.

ii) $\frac{5}{7}$ dos 28 alunos têm mais de 9 anos .

$\frac{5}{7} \cdot 28 = 20$ alunos têm 10 ou 11 anos .

28 – 20 = 8 alunos têm 11 anos.

O número de alunos com 10 anos de idade é:

28 – 8 – 7 = 13

Item: A

14. Considere as matrizes reais $M = \begin{bmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & a.b & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$. Se o determinante de M é igual a 2 e o determinante de N é igual a 1, então, o produto a.b pode ser igual a

A) −1 ou 2.

B) 1 ou −2.

C) −1 ou −2.

D) 1 ou 2.

Calculando cada determinante:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & ab & 0 \\ a & 0 & b \end{vmatrix} = 1$$

$a^2b^2 - a^2b^2 - b = 1$

$b = 1$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 2$$

$a.b^2 - a^2b = 2$

$a.1^2 - a^2.1 = 2$

$a^2 - a + 2 = 0$

$a = 2$ ou $a = -1$

Então ab = 2 ou ab = –1

Item: A

15. Uma das diagonais de um trapézio retângulo o decompõe em dois triângulos, sendo um deles equilátero cuja medida do lado é 24 cm. Assim, é correto dizer que a medida da área do trapézio, em cm², é

A) $126\sqrt{3}$.

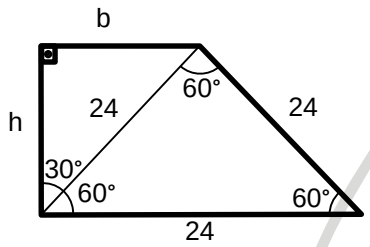
B) $216\sqrt{3}$.

C) $261\sqrt{3}$.

D) $612\sqrt{3}$.

Nota: Um trapézio retângulo é um trapézio no qual dois de seus ângulos internos são retos.

Considere a figura:



i) $\text{sen}30° = \dfrac{b}{24}$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{b}{24}$

$b = 12$

ii) $\cos 30° = \dfrac{h}{24}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{24}$

$h = 12\sqrt{3}$

iii) $A = \dfrac{(B+b)h}{2}$

$A = \dfrac{(24+12)12\sqrt{3}}{2}$

$A = 216\sqrt{3}$

Item: B

16. No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, a interseção dos gráficos das funções reais de variável real f(x)=sen(x) e g(x)=cos(x) são, para cada número inteiro k, os pontos $P(x_k, y_k)$. Então, os possíveis valores para y_k são

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Para que f(x)= g(x), temos:

$$\operatorname{sen}(x) = \cos(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Item: A

17. Sejam f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^3$. Se $h = g \circ f$ é a função composta de g com f (isto é, $h(x) = g(f(x))$), então, a expressão que define a função h^{-1}, inversa da função h, é $h^{-1}(x)$ igual a

A) $2.\log_2\left(\frac{x}{3}\right)$.

B) $3.\log_3\left(\frac{x}{2}\right)$.

C) $\frac{1}{2}\log_3(x)$.

D) $\frac{1}{3}\log_2(x)$.

Nota: Se a e z são números reais positivos e $a \neq 1$, $\log_a(z)$ é o logaritmo de z na base a.

$$h(x) = g(f(x))$$
$$h(x) = (2^x)^3$$
$$y = 2^{3x}$$

Para determinar a lei de formação da função inversa de h, temos:

$$x = 2^{3y}$$
$$\log_2^{(x)} = \log_2^{(2)3y}$$
$$\log_2^{(x)} = 3y$$
$$\frac{1}{3}\log_2^{x} = y$$

Item: D

18. Seja XYZ um triângulo retângulo em Y cuja medida do cateto XY é igual a 6 cm. Se a perpendicular a XZ que contém o ponto médio M do cateto XY intercepta XZ no ponto P, e se a medida do segmento PM é igual a 1,5 cm, então, a medida, em cm, do segmento MZ é igual a

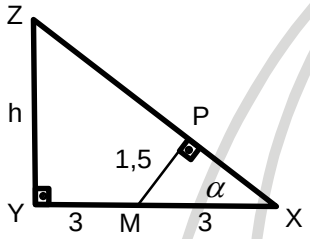
A) $\sqrt{21}$.

B) $\frac{2}{3}\sqrt{21}$.

C) $2\sqrt{21}$.

D) $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Considere a figura:



$\text{sen}\alpha = \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2}$

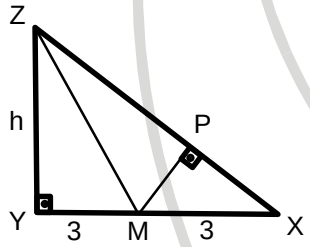
$\alpha = 30°$

$\text{tg}30° = \frac{h}{6}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{6}$

$h = 2\sqrt{3}$

Traçando ZM:



$ZM^2 = h^2 + 3^2$

$ZM = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 3^2}$

$ZM = \sqrt{21}$

Item: A

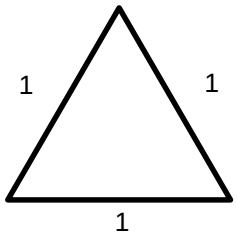
19. A razão entre as medidas das áreas de um triângulo equilátero cuja medida do lado é 1 cm e a medida da área de um quadrado cuja medida do lado é também igual a 1 cm é

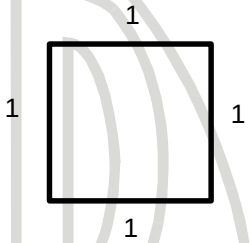
A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D) $\frac{\sqrt{3}}{5}$.





$A = \frac{1^2.\sqrt{3}}{4}$

$A = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$A = 1^2 = 1$

A razão vale $\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Item: C

20. Sejam W e V, respectivamente, os conjuntos das raízes, no universo dos números complexos, das equações $x^2 - 2x - 1 = 0$ e $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$.
Se $X = W \cup V$, então, a soma dos quadrados dos elementos de X é igual a

A) 20.

B) −20.

C) 4i.

D) −4i.

Nota: i é o número complexo cujo quadrado é igual a −1.

i) $x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \left(\frac{-2}{1}\right)^2 - 2.\frac{(-1)}{1} = 6$$

ii) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 =$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 = x_4)^2 - 2(x_1.x_2 + x_1.x_3 + ...x_3.x_4) =$$

$$\left(\frac{-0}{1}\right)^2 - 2.\frac{13}{1} = 0 - 26 = -26$$

iii) A soma dos quadrados dos elementos de X é igual a
6+(–26)= –20

Item: B

21. Se $S = -1+2-3+4-5+6-7+\cdots+98-99+100$, então, o valor de S é igual a

A) 55.

B) 60.

C) 50.

D) 45.

$S = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \cdots + 98 - 99 + 100$

$S = (-1 + 2) + (-3 + 4) + (-5 + 6) + (-7 + 8) + \cdots + (-97 + 98) + (-99 + 100)$

$S = 1+1+1+...+1+1$

$S = 50$

Item: C

22. Considere uma pirâmide regular, cuja base é um quadrado, contida em uma esfera, de tal modo que a base da pirâmide contém o centro da esfera e os vértices da pirâmide sejam pontos da superfície esférica. Se a medida do raio da esfera é igual a 1 metro, então, a medida do volume da pirâmide em metros cúbicos é igual a

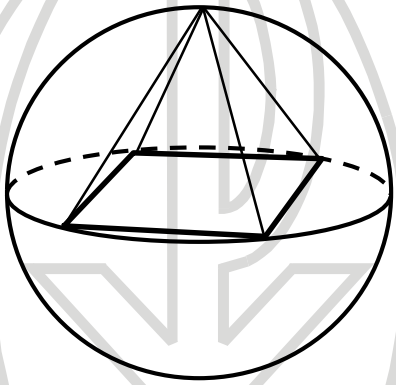
A) $\frac{2}{3}$.

B) $\frac{3}{5}$.

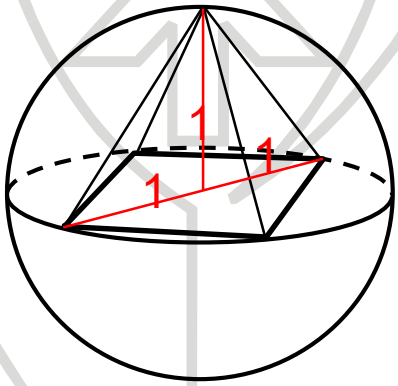
C) $\frac{3}{4}$.

D) $\frac{1}{2}$.

Considere que a figura abaixo representa a situação:



Observe que o diâmetro á a diagonal e a altura corresponde ao raio:



A área do quadrado pode ser calculada como a área do losango, $A = \frac{D.d}{2} = \frac{2.2}{2} = 2$. Então o volume é dado por:

$$V = \frac{A_{base}.h}{3}$$

$$V = \frac{2.1}{3}$$

$$V = \frac{2}{3}$$

Item: A