15. Sabe-se que, se a e b são números reais positivos, o gráfico da equação $ax^2 + by^2 = ab$ desenhado em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesiano ortogonal usual, é uma elipse cujo centro é a origem do sistema. Se o ponto Q (1, 0) pertence ao gráfico, e o ponto $P(0, \sqrt{3})$ é um dos focos da elipse, então o produto ab é igual a

A) 3.
B) 4.
C) 6.
D) 5.

Assunto: Geometria analítica

Se **Q (1, 0)** pertence ao gráfico da elipse, tem-se que:

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 0^2 = a \cdot b$$
$$a + 0 = a \cdot b$$
$$a = a \cdot b.$$

Como **a** é um real positivo, tem-se que:

$$1 = b$$
$$b = 1.$$

Assim, a equação da elipse deve ser representada por:

$$ax^2 + 1 \cdot y^2 = a \cdot 1$$
$$ax^2 + y^2 = a$$
$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{a} = 1.$$

A equação representa uma elipse centrada na origem. Sendo $P(0, \sqrt{3})$ um dos focos, sabe-se que essa elipse é vertical com semieixo maior $\sqrt{a}$ e semieixo menor 1, além de ter metade da distância focal dada por $c = \sqrt{3}$.

Da relação pitagórica da elipse, tem-se que:

$$1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2$$
$$1 + 3 = a$$
$$4 = a$$
$$a = 4.$$

Logo, $a \cdot b = 4 \cdot 1 \Rightarrow a \cdot b = 4$.

Item: B